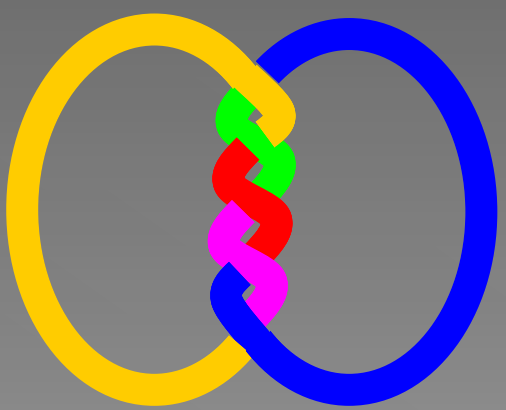
VII Festival Internacional de Matemática

Nudos y colores

Una incursión en la topología

Dr. Carlos Prieto
Instituto de Matemáticas, UNAM
www.matem.unam.mx/cprieto



VII Festival Internacional de Matemáticas
Santa Clara, Costa Rica
14 de abril de 2010

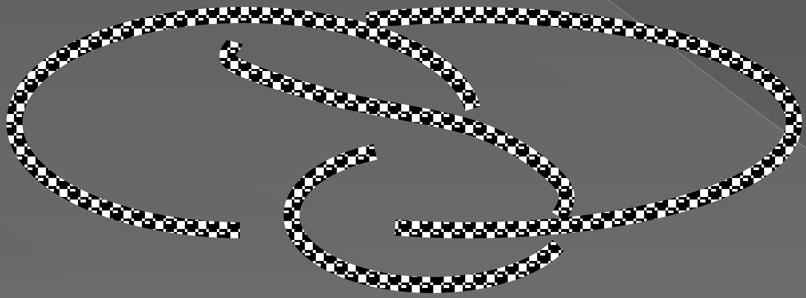
©Carlos Prieto de Castro, México 2010

Nudos y colores

Un **nudo** para un matemático es una curva, una especie de trayectoria, cerrada en el espacio.

Nudos y colores

Si tomamos un cordel , lo anudamos y lo dejamos caer en la mesa:



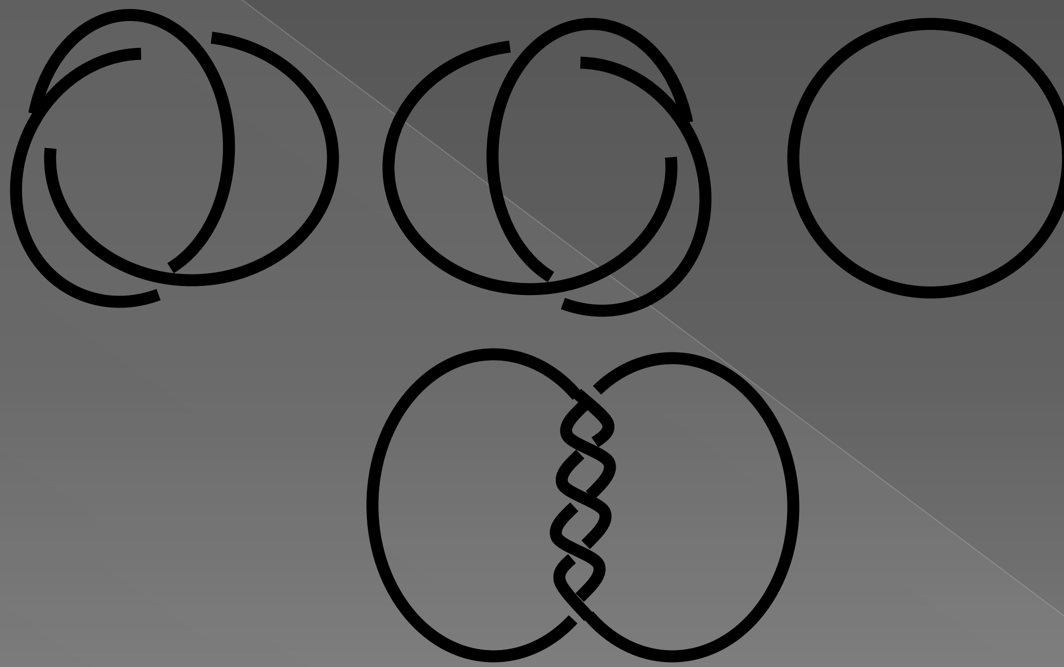
Luego dibujamos simplemente el contorno:

Nudos y colores

Lo vemos desde arriba así:

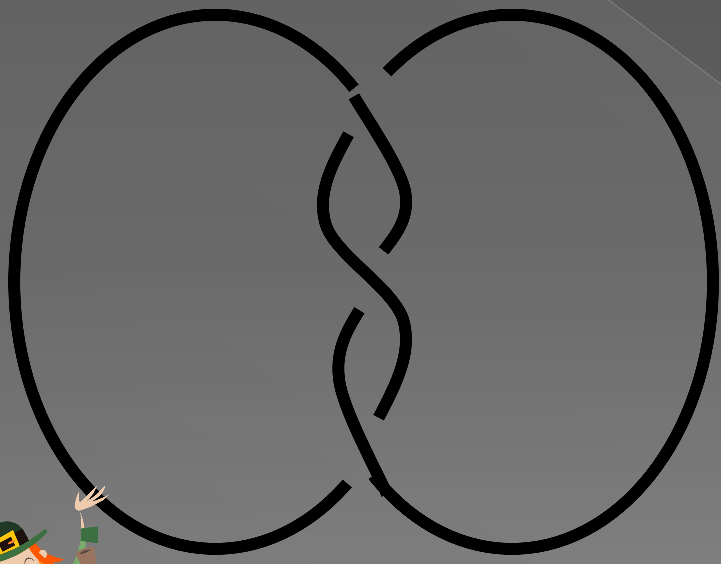
Nudos y colores

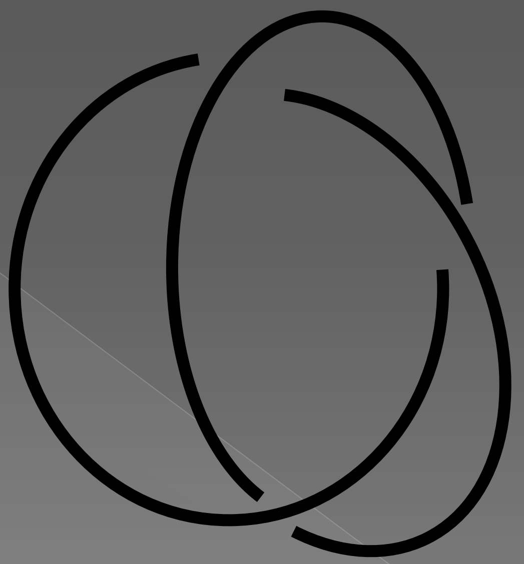
Varios diagramas de nudos:



Nudos y colores

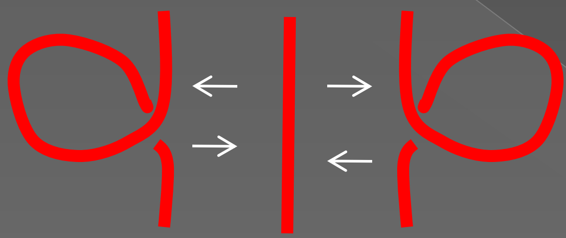
Dos diagramas del mismo nudo:



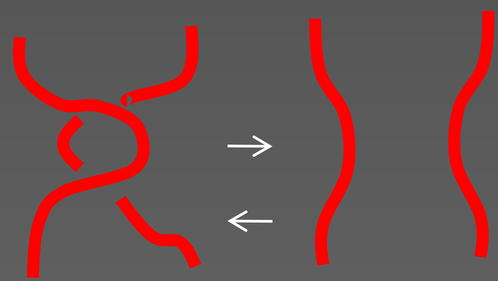


Nudos y colores

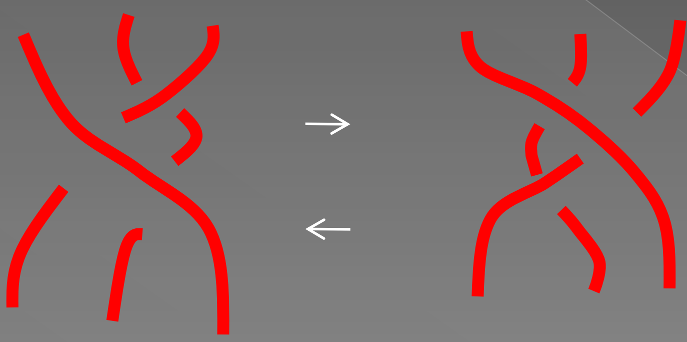
Jugadas de Reidemeister



Tipo I



Tipo II



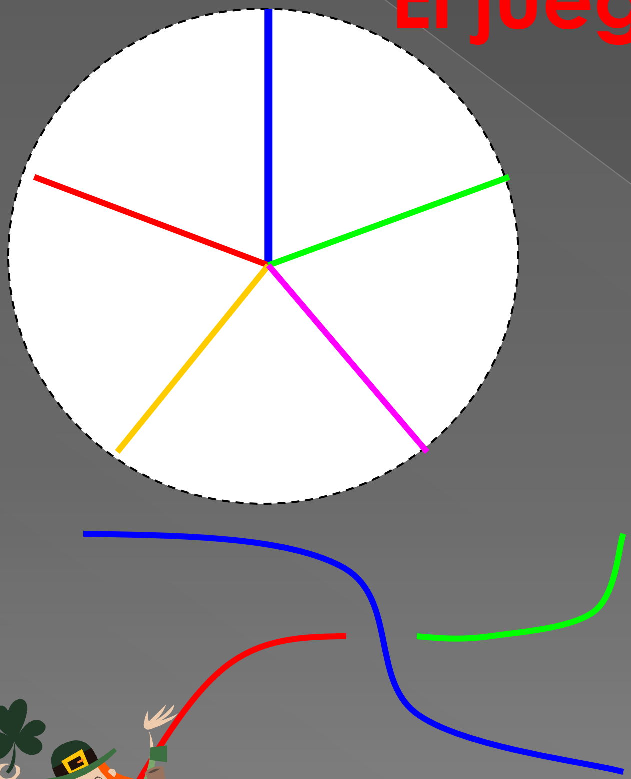
Tipo III

Nudos y colores

Teorema. *Dos diagramas corresponden al mismo nudo si y sólo si uno se puede transformar en el otro con un número finito de jugadas de Reidemeister.*

Nudos y colores

El juego de los colores

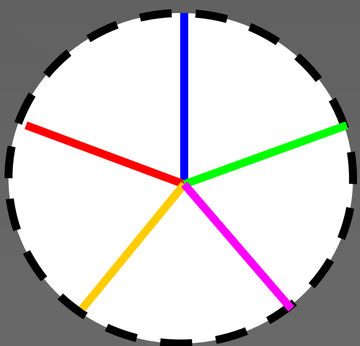


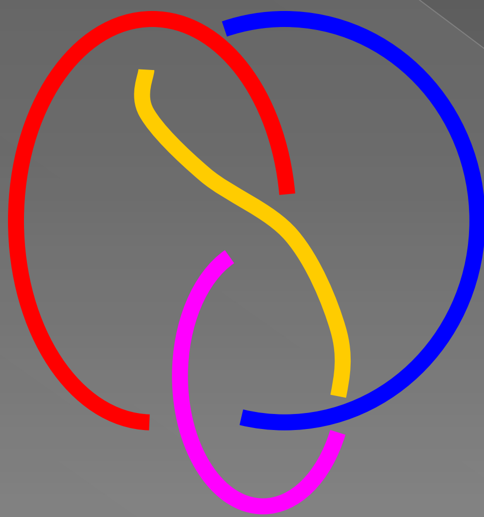
Reglas:

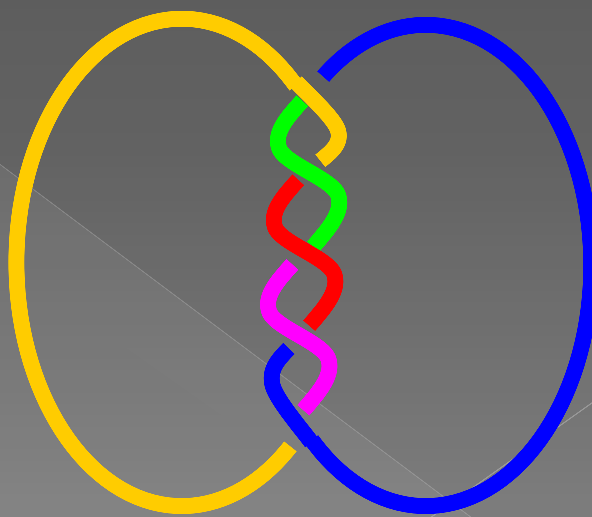
1. Deben usarse al menos dos colores (pero no necesariamente todos).
2. Donde tenemos que se encuentran un paso inferior y un paso superior, es decir, en un cruce, el color del arco correspondiente al paso superior debe corresponder al de la bisectriz del ángulo que forman en la rueda los rayos con los colores de los arcos que inciden en el cruce.

Nudos y colores

Usando la rueda cromática de cinco rayos, tenemos que la coloración de los nudos de la figura son admisibles:

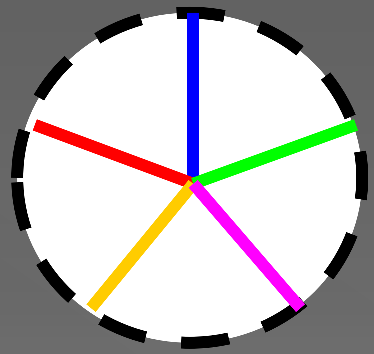


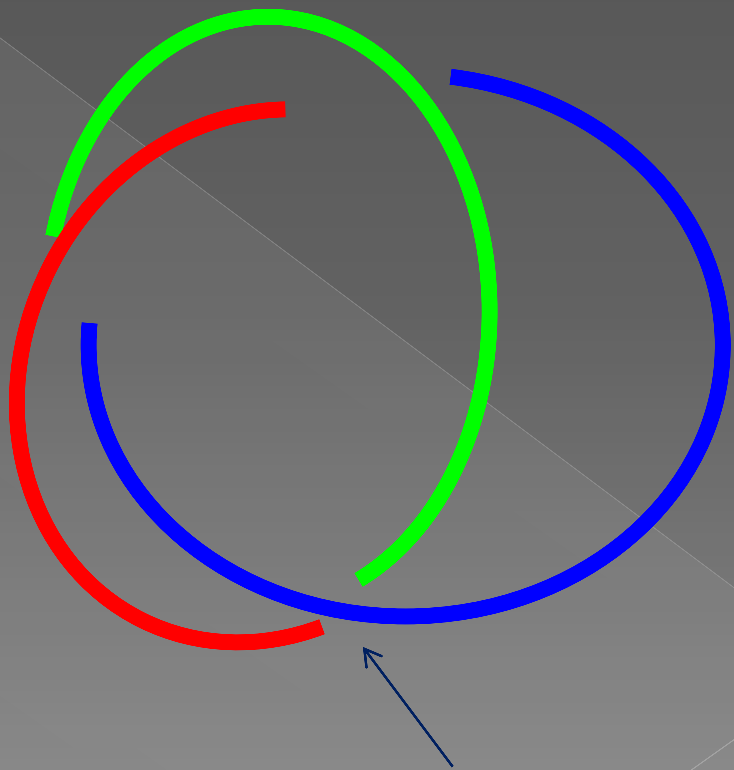




Nudos y colores

Usando la misma rueda cromática de cinco rayos, vemos que no hay coloración admisible del nudo trébol:



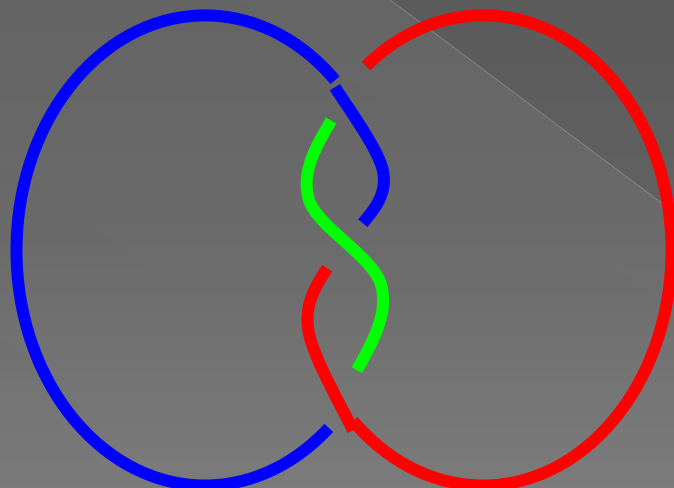


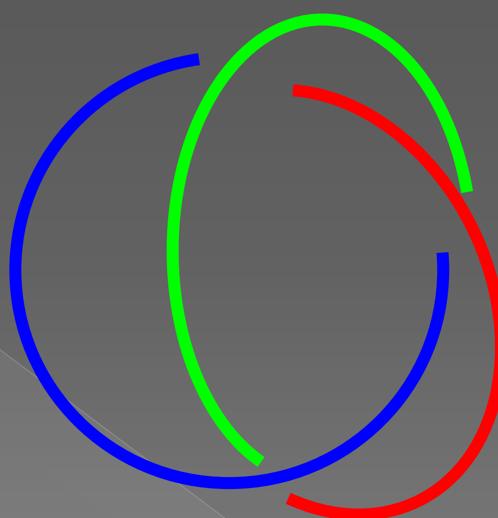
Nudos y colores

Teorema. *Si dos diagramas corresponden al mismo nudo, entonces, si uno admite una coloración con algún número de colores, el otro también la admite con el mismo número de colores.*

Nudos y colores

Los dos diagramas del nudo trébol son 3-coloreables:

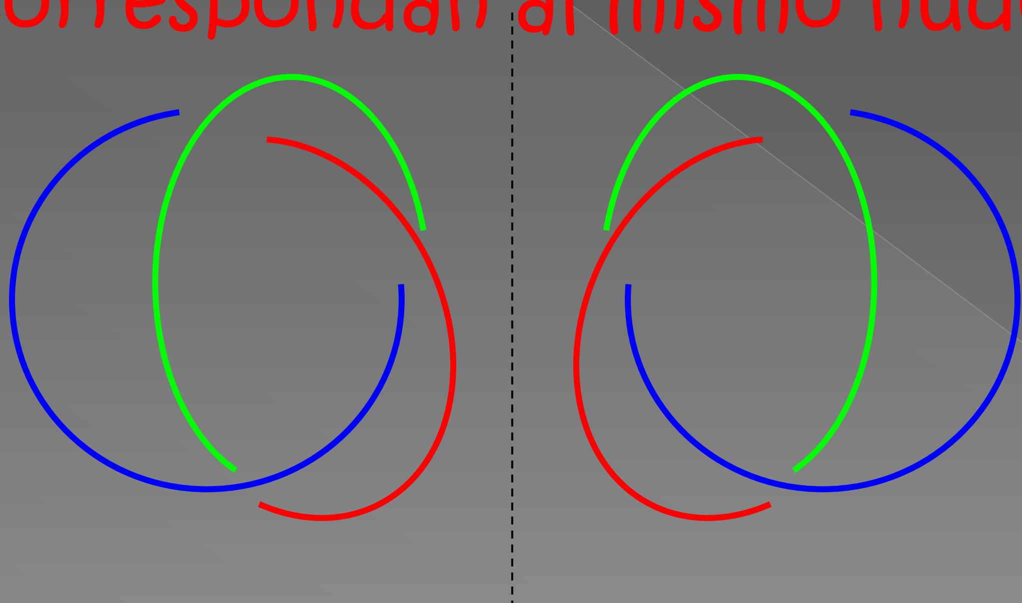




Nudos y colores

La afirmación inversa del teorema no es cierta:

El que dos diagramas acepten la misma coloración admisible, no significa que correspondan al mismo nudo.



Nudos y colores

Jugadas

Nudos y colores

El juego de los polinomios

Reglas:

1. Si partimos de un diagrama K y llamamos K_I y K_D a los dos diagramas que se obtienen eliminando el primer crucero, entonces $[K] = x[K_I] + x^{-1}[K_D]$.
2. Si un diagrama de nudo tiene un pedazo que es un nudo trivial separado; es decir, si $K = K' + O$, entonces $[K] = (-x^2 - x^{-2})[K']$.
3. Si tomamos el diagrama del nudo trivial O, entonces $[O] = 1$.

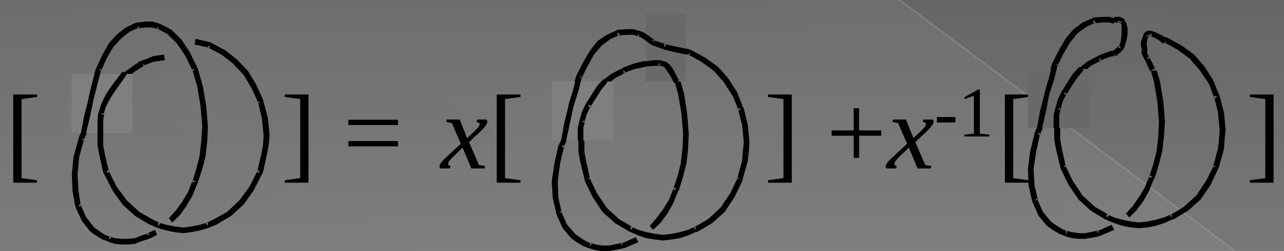
Nudos y colores

Regla 1:

(1)

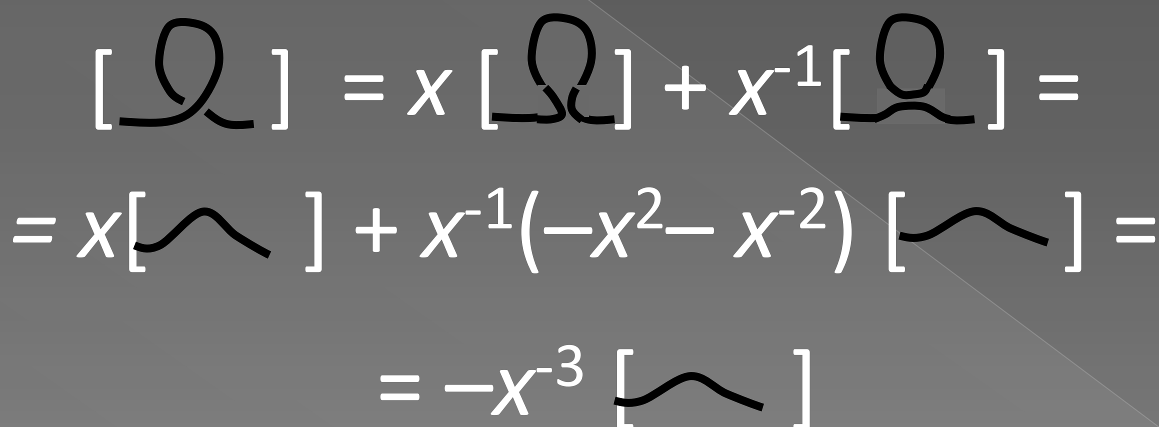
Ahora trabajemos con el primer término del polinomio y eliminemos en él el cruce de abajo:

(2)



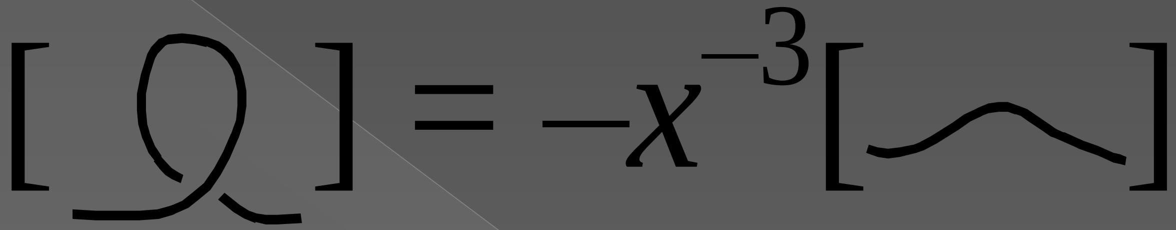
Nudos y colores

Aparecen “cocas”. ¿Cómo las eliminamos?

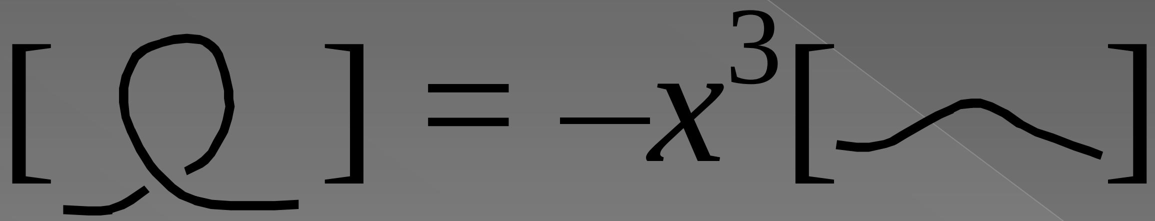


Nudos y colores

El costo de eliminar una coca izquierda:

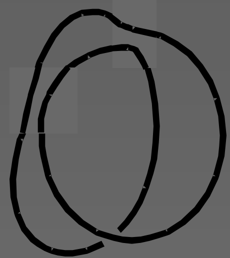
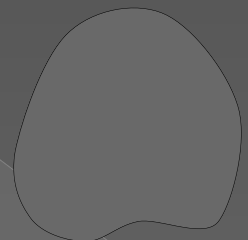


El costo de eliminar una coca izquierda:



Nudos y colores

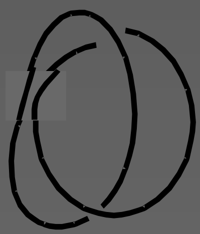
Eliminemos las cocas en (2):

$[$  $] = -x^{3}[$  $] = -x^{3}$

$[$  $] = -x^{-3}[$  $] = -x^{-3}$

Nudos y colores

Sustituyendo en los términos de (1):

[] =

$$= x(-x^{3}) + x^{-1}(-x^{-3}) = -x^{4} - x^{-4}$$

[] =

$=$ $-x^{3}$ [] $= (-x^{-3})(-x^{-3})$[] $= x^{-6}$

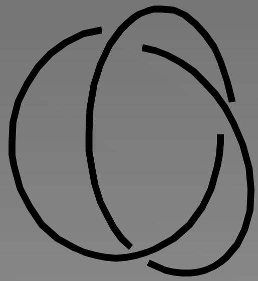
Nudos y colores

Sustituyendo en (1):

[] $= x(-x^{4} - x^{-4}) + x^{-1}(x^{-6}) =$

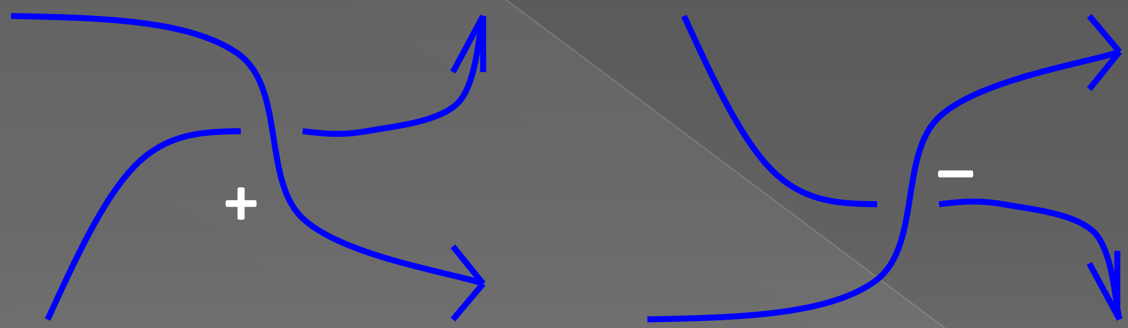
$= -x^{5} - x^{-3} + x^{-7}$

Para el trébol izquierdo:

[] $= -x^{-5} - x^{3} + x^{7}$

Nudos y colores

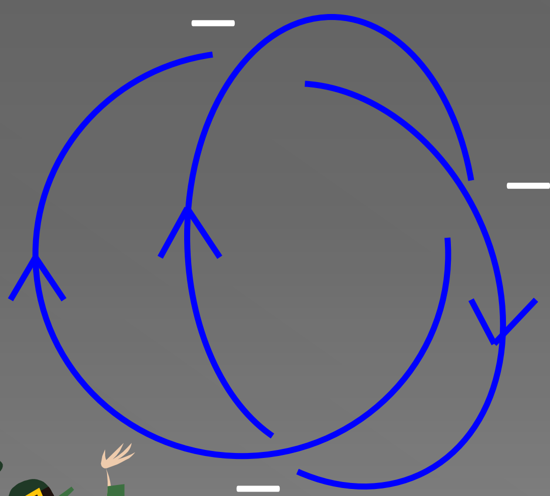
Aún hay que hacer una corrección:



Nudos y colores

Torcimiento

Número de cruces positivos menos número de cruces negativos



w = -3

para el otro trébol

w = 3

Nudos y colores

Polinomio de Jones

$$f_K(x) = (-x^{-3})^{w(K)}\,[K]$$

Para los tréboles

$$f_{TI}(x) = (-x^{-3})^{-3}(-x^{-5} - x^{3} + x^{7}) = x^{4} + x^{12} - x^{16}$$

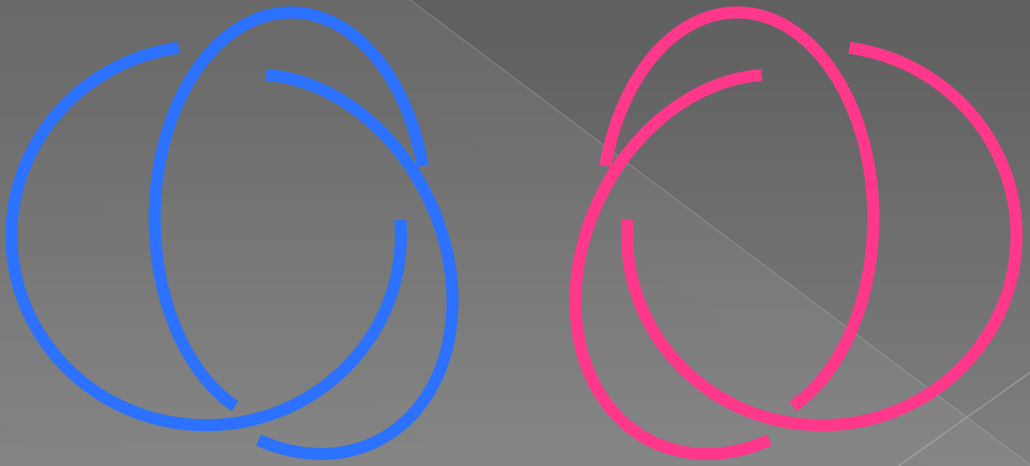
$$f_{TD}(x) = (-x^{-3})^{3}(-x^{5} - x^{-3} + x^{-7}) = x^{-4} + x^{-12} - x^{-16}$$

Nudos y colores

Teorema. *Si dos diagramas corresponden al mismo nudo, entonces, sus polinomios de Jones son iguales.*

Nudos y colores

Corolario. *Los tréboles izquierdo y derecho no son nudos equivalentes.*



Nudos y colores

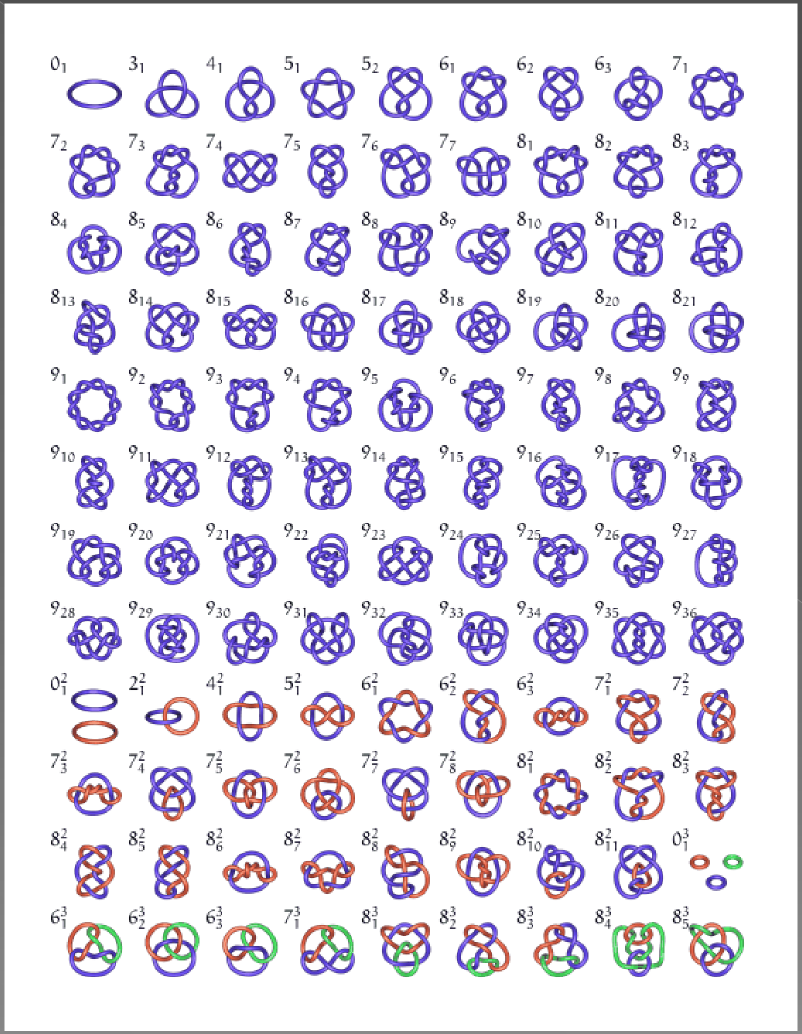


Tabla de nudos
hasta de 8 cruces

Nudos y colores

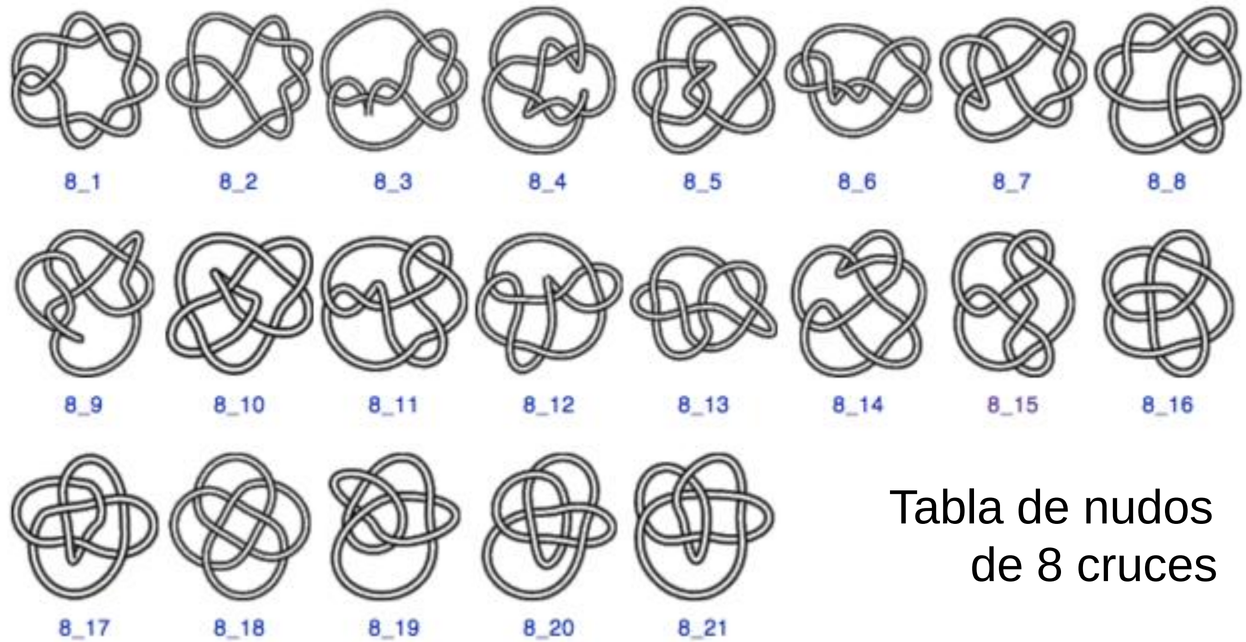


Tabla de nudos
de 8 cruces

Nudos y colores

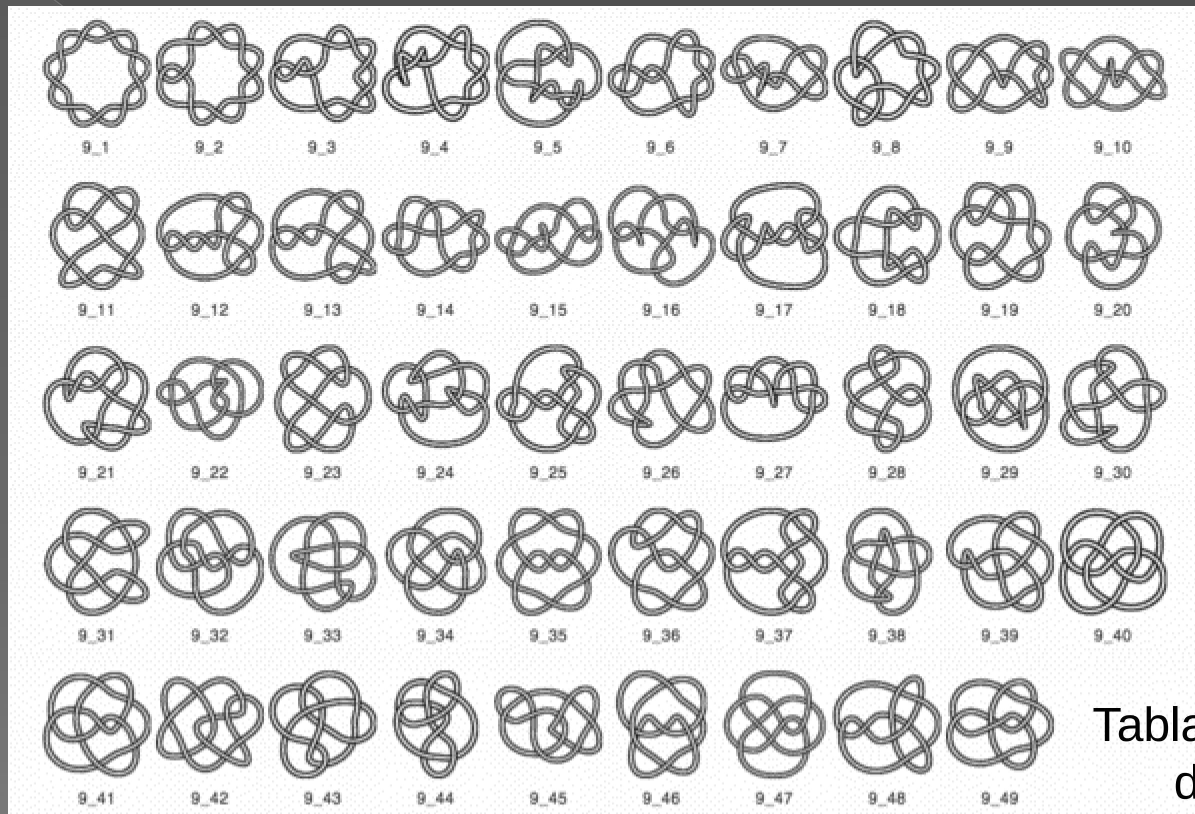


Tabla de nudos de 9 cruces

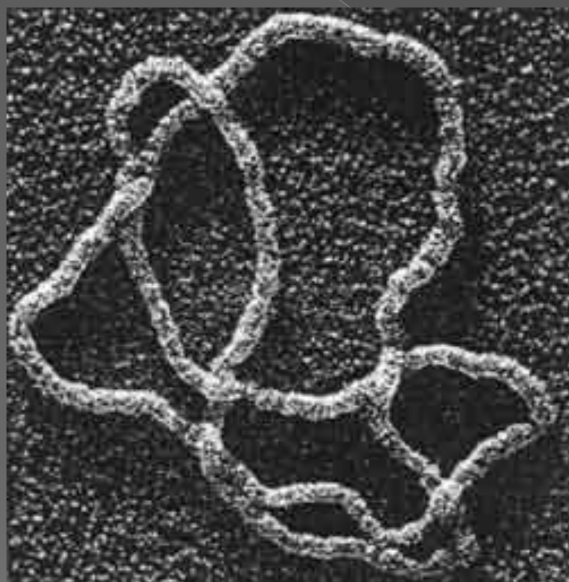
Nudos y colores

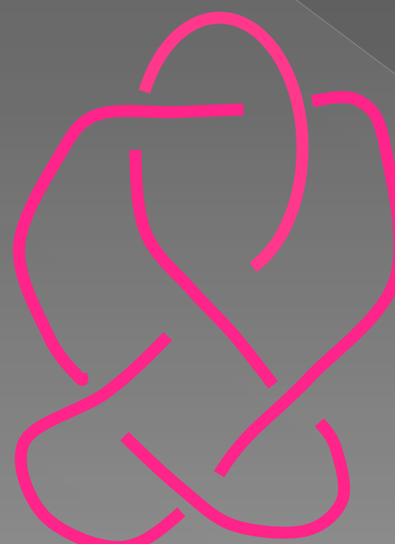
Aplicación de los nudos:

- Los nudos se aplican en biología molecular:
- La E-coli tiene ADN cíclico anudado
- Según el nudo, es la variante genética
- Enzimas, llamadas topoisomerasas, cambian los cruces
- Por tanto, cambian los nudos y la genética.

Nudos y colores

Molécula de ADN de E-coli



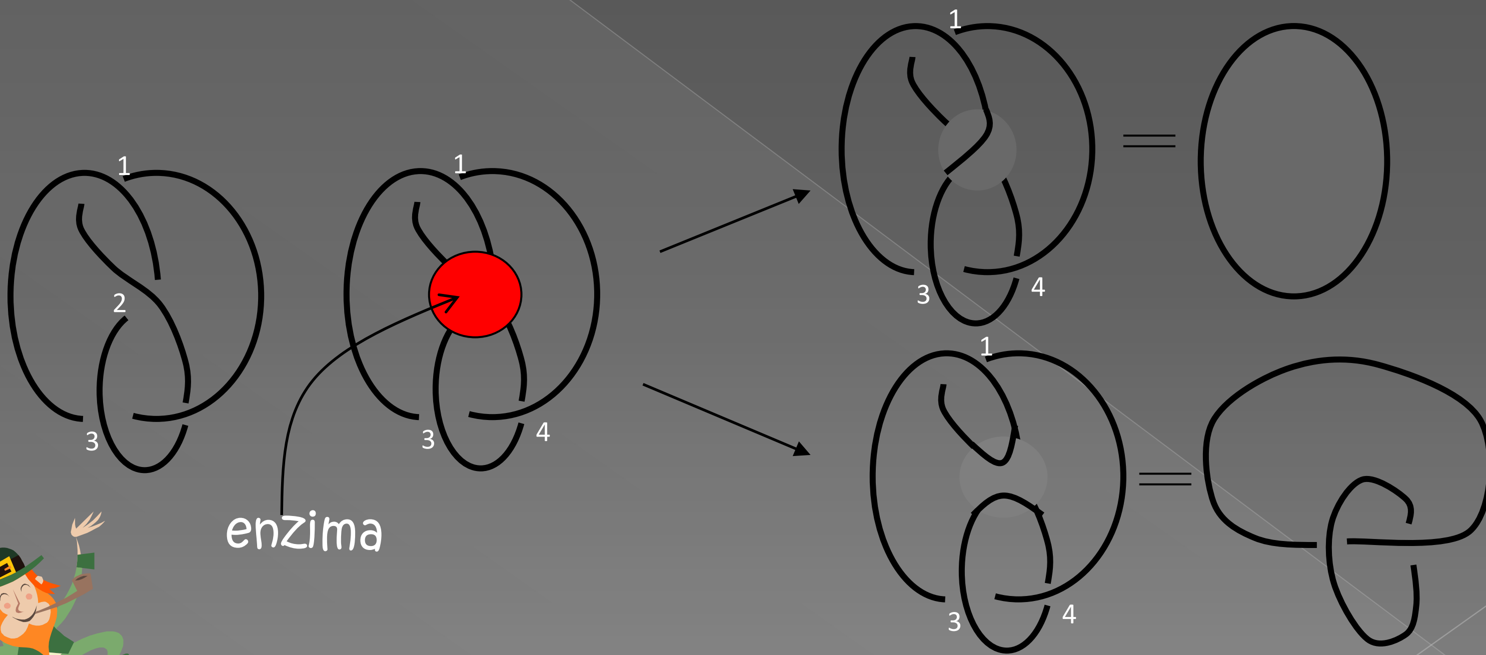


6_2

Nudo asociado

Nudos y colores

Posible acción de una topoisomerasa:



Nudos y colores

FIN

¡Muchas gracias!

http://www.matem.unam.mx/cprieto

cprieto@matem.unam.mx